INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
19 martie 2016

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea ştiințele naturii

CLASA A IX-A

1. Dorin are o grădină care trebuie săpată. El îi tocmeşte pe Ion şi pe Vasile, doi muncitori la fel de harnici. Ion munceşte 9 ore, iar Vasile 15 ore. Pentru munca sa, Vasile primeşte cu 90 lei mai mult decât Ion.

a) Ce sumă primeşte fiecare dintre cei doi muncitori?

b) Suprafața săpată de Ion în 9 ore are forma unui pătrat cu latura de 9 metri. De cât timp are nevoie Ion pentru a săpa o suprafață având forma unui pătrat cu latura de 3 metri?

2. Pe latura CD a dreptunghiului $ABCD$ se consideră punctele P şi Q astfel încât $DP = PQ = QC$. Definim punctele R şi S prin $2\overrightarrow{AR} = 3\overrightarrow{AP}$, respectiv $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AR}$.

a) Demonstrați că punctele A, C şi S sunt coliniare.

b) Arătați că Q este centrul de greutate al triunghiului ARS.

3. Se consideră numerele reale a, b şi c astfel încât $a \le b \le c$, $a+b+c=1$ şi $a^2+b^2+c^2=1$.

a) Demonstrați că $b \in \left[0, \frac{2}{3}\right]$.

b) Găsiți trei numere reale, distincte două câte două, având proprietățile din enunț.

4. Pentru fiecare număr natural m, se consideră mulțimea $A_m = \{x \in \mathbb{Z} \mid |2x-1| + |3x-1| = m\}$.

a) Determinați A_0.

b) Demonstrați că, oricare ar fi numărul natural m, mulțimea A_m are cel mult un element.

c) Dacă n este un număr întreg oarecare, arătați că există un număr natural m pentru care $n \in A_m$.

Notă. Timp de lucru: 4 ore. Fiecare problemă este notată cu punctaje de la 0 la 7.

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
19 martie 2016

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea ştiințele naturii

CLASA A X-A

1. a) Demonstrați că $\left(29\sqrt{2}+41\right)\cdot\left(29\sqrt{2}-41\right)=1$

b) Calculați $\left(1+\sqrt{2}\right)^2;\left(1+\sqrt{2}\right)^3$ şi $\left(1+\sqrt{2}\right)^5$

c) Determinați $n\in\mathbb{N}^*, n\geq 2$ pentru care are loc egalitatea $\sqrt[n]{29\sqrt{2}+41}-\sqrt[n]{29\sqrt{2}-41}=2$.

2. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\log_2\left(x^2+4\right)-\log_2 x=4x-x^2-2$.

3. Determinați mulțimea $M=\left\{(x,y)\in\mathcal{P}\mid \mathrm{Re}\left(\frac{z-2}{z-4i}\right)=0\right\}$.

Reprezentați geometric mulțimea *M*. (unde $z=x+yi,\mathcal{P}$ - planul complex)

4. La un turneu de fotbal în sală participă 15 echipe, fiecare jucând o singură dată cu fiecare dintre celelalte echipe. Pentru victorie se acordă echipei câştigătoare 3 puncte, pentru meci egal câte 2 puncte pentru fiecare echipă, iar pentru înfrângere 1 punct. În clasamentul întocmit la sfârşitul turneului nu există echipe cu acelaşi număr de puncte, iar echipa clasată pe ultimul loc are 21 puncte.

a) Care este numărul de meciuri disputate în cadrul turneului ?
b) Care este numărul total de puncte acordate la toate meciurile ?
c) Să se demonstreze că prima clasată a făcut cel puțin un meci egal.

Notă. Timp de lucru: 4 ore. Fiecare problemă este notată cu punctaje de la 0 la 7.

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEŢEANĂ
19 martie 2016

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea ştiinţele naturii

CLASA A XI-A

1. În fiecare din cele 9 căsuţe ale unei table de latura 3 este scrisă cifra 0.
Se alege un pătrat de latură 2 şi se măreşte numărul scris în fiecare din cele 4 căsuţe cu o unitate.
Folosind repetat acest procedeu putem obţine configuraţia alăturată ?
(Suma tuturor numerelor din configuraţie nu este multiplu de 4).

4	9	6
7	24	11
6	12	8

2. Fie matricele $A=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$ şi $X(a)=I_2+aA;\, a\in\mathbb{R}$. Demonstraţi că $X(a)$ este inversabilă dacă şi numai dacă $a\neq -1$ şi calculaţi $X^{-1}(1)\cdot X(2)\cdot X^{-1}(3)\cdot X(4)\cdot\ldots\cdot X^{-1}(2013)\cdot X(2014)\cdot$

3. Fie A, B, C puncte necoliniare în plan având coordonate întregi.
Să se arate că aria ΔABC este mai mare sau egală cu $\frac{1}{2}$.

4. a) Precizaţi dacă următoarele afirmaţii sunt adevărate sau false:
i) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=1$; ii) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x+\pi)}{x+\pi}=1$. Justificare.
b) Să se calculeze raportul $\frac{a}{b}$ ştiind că $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(ax)-\sin(ax)}{\operatorname{tg}(bx)-\sin(bx)}=2016^3$.

Notă. Timp de lucru: 4 ore. Fiecare problemă este notată cu punctaje de la 0 la 7.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEŢEANĂ 19 martie 2016

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea ştiinţele naturii

CLASA A XII-A

1. Se consideră mulţimea $G=\left\{A(k)=\begin{pmatrix}2^k & 0 & 2^k\\ 0 & 0 & 0\\ 2^k & 0 & 2^k\end{pmatrix}, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

a) Să se arate că pentru orice m,n întregi, are loc: $A(m)\cdot A(n)=A(m+n+1)$

b) Să se demonstreze că $(G,\cdot)$ este un grup abelian, unde "·" reprezintă înmulţirea matricelor;

c) Dacă mulţimea $H\neq\{A(-1)\}$ este un subgrup al grupului (G,·), să se demonstreze că H are cel puţin 2016 elemente.

2. Considerăm funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+e^x$ şi $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$.

a) Arătaţi că funcţia F este bijectivă;

b) Calculaţi $\int_0^{e-\frac{2}{3}} F^{-1}(x)\,dx$.

3. Pe mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$, definim legea de compoziţie $x*y=xy+5x+5y+20$. Se admite faptul că $G=(-5,\infty)$ împreuna cu legea de compoziţie "*" are o structură algebrică de grup.

a) Să se arate că grupurile $(G,*)$ şi $(\mathbb{R}_+^*,\cdot)$ sunt izomorfe;

b) Să se calculeze -2016 * (-2015) *… *(-1)*0*1* … * 2015 *2016;

c) Se consideră mulţimea $H=\{a^2-5, a\in\mathbb{Q}\}$. Să se arate că (H,*) este un subgrup al grupului (G,*).

4. Pentru orice n număr natural nenul, se consideră numerele $I_n=\int\frac{\sin(nx)}{\sin(x)}dx, \forall x\in(0,\pi)$.

a) Să se demonstreze că $I_{n+2}=I_n+\frac{2\sin(n+1)x}{n+1}, \forall n\in\mathbb{N}^*$;

b) Să se determine funcţia $f:(0,\pi)\to\mathbb{R}$, ştiind că $f'(x)\cdot\sin x=\sin 5x$ şi $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

Notă. Timp de lucru: 4 ore. Fiecare problemă este notată cu punctaje de la 0 la 7.