

INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
19 martie 2016



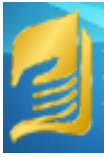
FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea științele naturii

CLASA A IX-A

- Dorin are o grădină care trebuie săpată. El îi tocmește pe Ion și pe Vasile, doi muncitori la fel de harnici. Ion muncește 9 ore, iar Vasile 15 ore. Pentru munca sa, Vasile primește cu 90 lei mai mult decât Ion.
 - Ce sumă primește fiecare dintre cei doi muncitori?
 - Suprafața săpată de Ion în 9 ore are forma unui pătrat cu latura de 9 metri. De cât timp are nevoie Ion pentru a săpa o suprafață având forma unui pătrat cu latura de 3 metri?
- Pe latura CD a dreptunghiului $ABCD$ se consideră punctele P și Q astfel încât $DP = PQ = QC$. Definem punctele R și S prin $2\overline{AR} = 3\overline{AP}$, respectiv $\overline{AS} = \overline{AB} + \overline{AR}$.
 - Demonstrați că punctele A , C și S sunt coliniare.
 - Arătați că Q este centrul de greutate al triunghiului ARS .
- Se consideră numerele reale a , b și c astfel încât $a \leq b \leq c$, $a + b + c = 1$ și $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.
 - Demonstrați că $b \in \left[0, \frac{2}{3}\right]$.
 - Găsiți trei numere reale, distincte două câte două, având proprietățile din enunț.
- Pentru fiecare număr natural m , se consideră mulțimea $A_m = \{x \in \mathbb{Z} \mid |2x-1| + |3x-1| = m\}$.
 - Determinați A_0 .
 - Demonstrați că, oricare ar fi numărul natural m , mulțimea A_m are cel mult un element.
 - Dacă n este un număr întreg oarecare, arătați că există un număr natural m pentru care $n \in A_m$.

Notă. Timp de lucru: 4 ore. Fiecare problemă este notată cu punctaje de la 0 la 7.



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
19 martie 2016



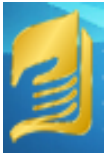
FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea științele naturii

CLASA A X-A

- Demonstrați că $(29\sqrt{2} + 41) \cdot (29\sqrt{2} - 41) = 1$
 - Calculați $(1 + \sqrt{2})^2$; $(1 + \sqrt{2})^3$ și $(1 + \sqrt{2})^5$
 - Determinați $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$ pentru care are loc egalitatea $\sqrt[n]{29\sqrt{2} + 41} - \sqrt[n]{29\sqrt{2} - 41} = 2$.
- Rezolvați în \mathbb{R} ecuația $\log_2(x^2 + 4) - \log_2 x = 4x - x^2 - 2$.
- Determinați mulțimea $M = \left\{ (x, y) \in \mathcal{P} \mid \operatorname{Re} \left(\frac{z-2}{z-4i} \right) = 0 \right\}$.
Reprezentați geometric mulțimea M . (unde $z = x + yi$, \mathcal{P} - planul complex)
- La un turneu de fotbal în sală participă 15 echipe, fiecare jucând o singură dată cu fiecare dintre celelalte echipe. Pentru victorie se acordă echipei câștigătoare 3 puncte, pentru meci egal câte 2 puncte pentru fiecare echipă, iar pentru înfrângere 1 punct. În clasamentul întocmit la sfârșitul turneului nu există echipe cu același număr de puncte, iar echipa clasată pe ultimul loc are 21 puncte.
 - Care este numărul de meciuri disputate în cadrul turneului ?
 - Care este numărul total de puncte acordate la toate meciurile ?
 - Să se demonstreze că prima clasată a făcut cel puțin un meci egal.

Notă. Timp de lucru: 4 ore. Fiecare problemă este notată cu punctaje de la 0 la 7.



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
19 martie 2016



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea științele naturii

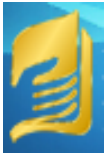
CLASA A XI-A

1. În fiecare din cele 9 căsuțe ale unei table de latură 3 este scrisă cifra 0.
Se alege un pătrat de latură 2 și se mărește numărul scris în fiecare din
cele 4 căsuțe cu o unitate.
Folosind repetat acest procedeu putem obține configurația alăturată ?
(Suma tuturor numerelor din configurație nu este multiplu de 4).

4	9	6
7	24	11
6	12	8

2. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ și $X(a) = I_2 + aA; a \in \mathbb{R}$. Demonstrați că $X(a)$ este inversabilă
dacă și numai dacă $a \neq -1$ și calculați $X^{-1}(1) \cdot X(2) \cdot X^{-1}(3) \cdot X(4) \cdot \dots \cdot X^{-1}(2013) \cdot X(2014)$.
3. Fie A, B, C puncte necoliniare în plan având coordonate întregi.
Să se arate că aria ΔABC este mai mare sau egală cu $\frac{1}{2}$.
4. a) Precizați dacă următoarele afirmații sunt adevărate sau false:
i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 1$; ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \pi)}{x + \pi} = 1$. Justificare.
b) Să se calculeze raportul $\frac{a}{b}$ știind că $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(ax) - \sin(ax)}{\operatorname{tg}(bx) - \sin(bx)} = 2016^3$.

Notă. Timp de lucru: 4 ore. Fiecare problemă este notată cu punctaje de la 0 la 7.



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
19 martie 2016



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea științele naturii

CLASA A XII-A

1. Se consideră mulțimea $G = \left\{ A(k) = \begin{pmatrix} 2^k & 0 & 2^k \\ 0 & 0 & 0 \\ 2^k & 0 & 2^k \end{pmatrix}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

a) Să se arate că pentru orice m, n întregi, are loc: $A(m) \cdot A(n) = A(m+n+1)$

b) Să se demonstreze că (G, \cdot) este un grup abelian, unde " \cdot " reprezintă înmulțirea matricelor;

c) Dacă mulțimea $H \neq \{A(-1)\}$ este un subgrup al grupului (G, \cdot) , să se demonstreze că H are cel puțin 2016 elemente.

2. Considerăm funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + e^x$ și $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^x f(t) dt$.

a) Arătați că funcția F este bijectivă;

b) Calculați $\int_0^{e-\frac{2}{3}} F^{-1}(x) dx$.

3. Pe mulțimea numerelor reale \mathbb{R} , definim legea de compoziție $x * y = xy + 5x + 5y + 20$. Se admite faptul că $G = (-5, \infty)$ împreună cu legea de compoziție "*" are o structură algebrică de grup.

a) Să se arate că grupurile $(G, *)$ și (\mathbb{R}_+^*, \cdot) sunt izomorfe;

b) Să se calculeze $-2016 * (-2015) * \dots * (-1) * 0 * 1 * \dots * 2015 * 2016$;

c) Se consideră mulțimea $H = \{a^2 - 5, a \in \mathbb{Q}\}$. Să se arate că $(H, *)$ este un subgrup al grupului $(G, *)$.

4. Pentru orice n număr natural nenul, se consideră numerele $I_n = \int \frac{\sin(nx)}{\sin(x)} dx, \forall x \in (0, \pi)$.

a) Să se demonstreze că $I_{n+2} = I_n + \frac{2 \sin(n+1)x}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$;

b) Să se determine funcția $f: (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$, știind că $f'(x) \cdot \sin x = \sin 5x$ și $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

Notă. Timp de lucru: 4 ore. Fiecare problemă este notată cu punctaje de la 0 la 7.